Презентация на тему «Использование матанализа при решении задач»

Выполнил: Жилич Кирилл Андреевич

Руководитель: Бущук Елена Петровна

СШ №7 г. Бреста

2022 г

Введение

Каждый из нас при изучении математики в школе или самостоятельно сталкивался с задачами, формулировка которых вроде бы понятна. Но даже неясно с какой стороны к ним подступиться. Если эта задача имеет прикладное значение, вы можете попытаться представить систему в голове, и к своему несчастью обнаружите, что описанных параметров достаточно чтобы однозначно увидеть систему перед собой. На этом этапе становится ясно, что виной замешательства является банальная нехватка методов решения подобных задач. Данная работа ставит перед собой цель расширить арсенал методов читающего, и показать ему элегантные пути решения довольно сложных задач. В том числе работа призвана показать что не всегда интуитивное решение подобных задач является правильным (часто, но не всегда). Работа не освещает весь спектр тем этого пласта знания, но является мотивацией к их дальнейшему изучению.

Задачи

- познакомить читателя с понятием производной, её вариационным аналогом, и интегралом.

- изучить их свойства и задачи, которые можно решить с помощью них.

- решить несколько сугубо алгебраических задач, для улучшения понимания темы.

- решить несколько прикладных задач, для демонстрации практической силы методов.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Определение производной. Вычисление производной простейших функций

Неформально говоря, операцию взятия производной можно понимать как отображение между двумя функциями, которое функции $f(x)$ ставит в соответствие её производную, обозначаемую как $f'(x)$ или же $\frac{df}{dx}$. Формально говоря, производная- это предел отношения приращения функции, к приращению аргумента. То бишь- скорость изменения функции.

$$\frac{df}{dx} = \lim_{a\to 0}\frac{f(x+a) - f(x)}{a}$$

Легко проверить, что такая функция обладает следующими свойствами, которые понадобятся нам в дальнейшем.

$$(f+g)' = f' + g'$$

$$(const \cdot f)' = const \cdot f'$$

$$(uv)' = u'v + v'u$$

Менее очевидно следующее свойство. Тем н менее это пожалуй самое важное свойство операции взятия производной.

$$(u^\circ v)' = (u'^\circ v) \cdot v'$$

Для начала решим несколько задач на взятие производной по определению, а после покажем её классическое применение.

Задача 1. Найти производную функции $|x|$.

$$\lim_{a\to 0}\frac{|x+a| - |x|}{a} = \lim_{a\to 0}\frac{|x+a| - |x|}{a} * \frac{|x+a| + |x|}{|x+a| + |x|} = \lim_{a\to 0}\frac{(x+a)^2 - x^2}{a(|x+a| + |x|)}$$
$$= \lim_{a\to 0}\frac{x^2 + 2ax + a^2 - x^2}{a(|x+a| + |x|)} = \lim_{a\to 0}\frac{2ax + a^2}{a(|x+a| + |x|)}$$
$$= \lim_{a\to 0}\frac{2x + a}{|x+a| + |x|} = \frac{2x}{2|x|} = \frac{x}{|x|} = sgn(x) \qquad x \neq 0$$

Задача 2. Найти производную функции x^3

$$\lim_{a\to 0}\frac{(x+a)^3 - x^3}{a} = \lim_{a\to 0}\frac{(x+a)^3 - x^3}{a} = \lim_{a\to 0}\frac{x^3 + 3a^2x + 3x^2a - x^3}{a}$$
$$= \lim_{a\to 0}\frac{3a^2x + 3x^2a}{a} = \lim_{a\to 0} 3ax + 3x^2 = 3x^2$$

Стоит заметить, что аналогичным способом можно найти общую формулу производной функции вида x^n . Записывая разложение в виде бинома Ньютона, и устремляя a к нулю. Мы получим что $(x^n)' = nx^{n-1}$. Стоит заметить что не только при натуральных n. Абсолютно при любых вещественных n! Напоследок решим ещё одну задачу на взятие производной по определению. Она чуть посложнее, но гораздо более содержательна. Однако содержательностью она обязана именно утверждениям, лежащим в её доказательстве. Потому для начала сформулируем их.

Лемма о двух милиционерах. Если на некотором множестве M функция $f(x)$ такова, что для любых значений x из M выполняется неравенство. $\varphi(x) \leq f(x) \leq \vartheta(x)$. И в M существует точка a, такая что:

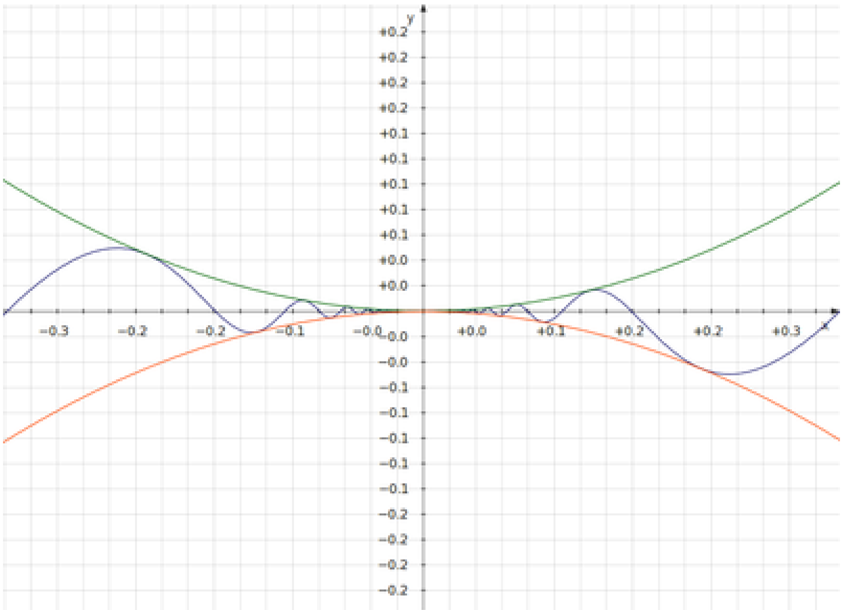
$$\lim_{x \to a} \varphi(x) = \lim_{x \to a} \vartheta(x) = A$$

То

$$\lim_{x \to a} f(x) = A$$

Разумеется предполагается что все три функции определены всюду на M.

Для упрощения понимания вставлена картинка с примером:



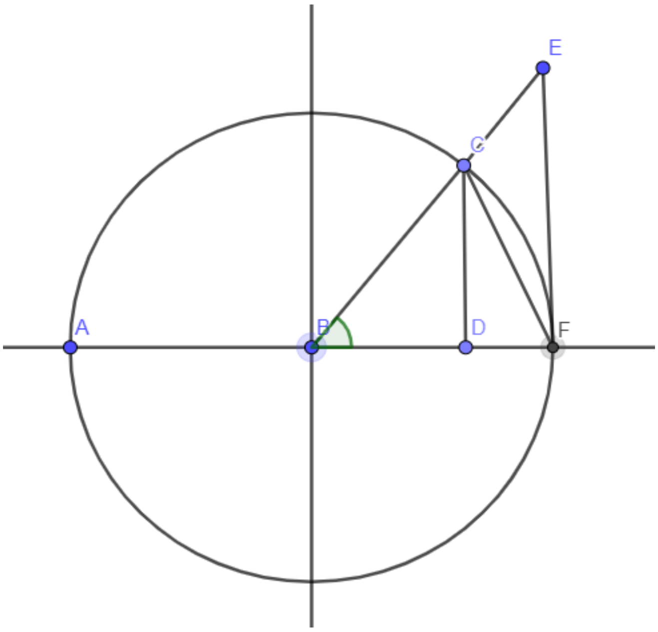
Лемма интуитивно понятна и её доказательство очень просто, потому здесь оно не приводится. Однако если читатель очень хочет с ним ознакомиться, оно есть в википедии (см. Теорема о двух милиционерах)

Далее, с помощью нашей сокрушительной леммы одолеем первый из трёх замечательных пределов!

Подзадача 3.1 Докажите 1й замечательный предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Для решения этой задачи воспользуемся тригонометром.



Зелёный угол обозначим за x. Заметим, что по крайней в первой четверти (рисунок перед вами), выполняется неравенство.

$$S_{BCD} \le S_{BCF} \le S_{BEF}$$

$$\frac{1}{2}\sin(x) \le \frac{x}{2} \le \frac{1}{2}tg(x)$$

$$\sin(x) \le x \le tg(x)$$

$$1 \le \frac{x}{\sin(x)} \le \frac{1}{cosx}$$

На случай возникших вопросов заметим, что синус в первой четверти положителен, потому знаки неравенства остаются те же.

А теперь посмотрим что мы имеем.

$$\lim_{x\to 0} 1 = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos(x)} = 1$$

А значит, по лемме о двух милиционерах:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin(x)} = 1$$

q.e.d

Теперь перейдём к главной задаче

Задача 3. Вычислите производную функции $\sin(x)$

$$\lim_{a\to 0}\frac{sin(x+a)-sin(x)}{a}=\lim_{a\to 0}\frac{2\sin\left(\frac{a}{2}\right)\cos(\frac{2x+a}{2})}{a}=$$

$$=\lim_{a\to 0}\frac{\sin\left(\frac{a}{2}\right)\cos(\frac{2x+a}{2})}{(\frac{a}{2})}=\lim_{a\to 0}\cos\left(\frac{2x+a}{2}\right)=\cos(x)$$

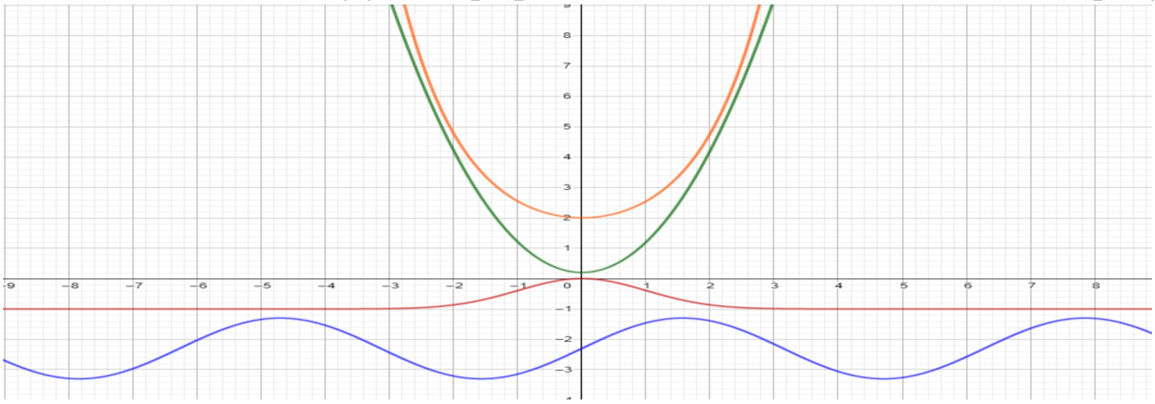
Классическое применение производной. Лемма Ферма. Ряд Тейлора

Основной целью этого пункта является формулировка, доказательство, и формирование интуитивного понимания леммы Ферма.

Лемма Ферма. Пусть функция $f(x)$ имеет во внутренней точке (к примеру в точке $x=a$) области определения локальный экстремум (минимум, или максимум не суть важно). Тогда $f'(a)=0$.

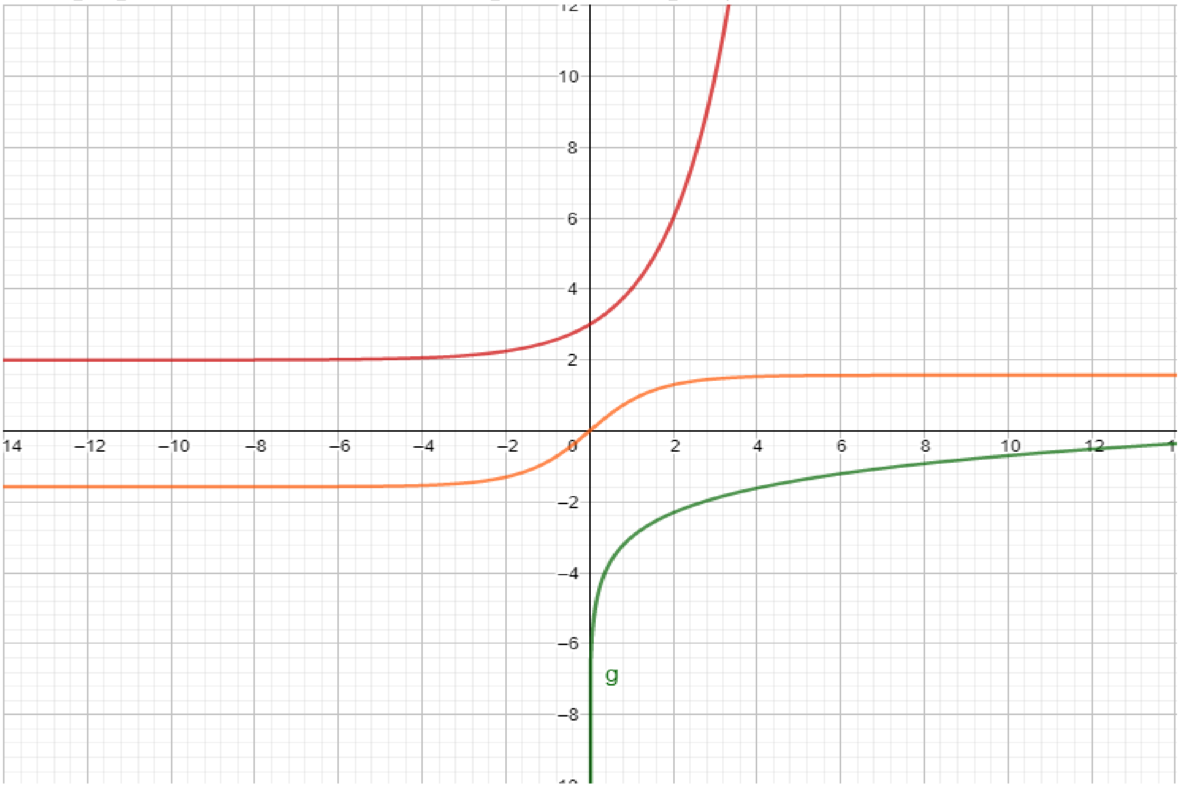
Интуитивное доказательство.

Как уже было сказано, физический и интуитивный подход к пониманию производной- это восприятие её как скорости изменения функции. Потому логично говорить что если с ростом x растёт $f(x)$, то $f'(x)$ положительна. Если с ростом x $f(x)$ уменьшается то $f'(x)$ отрицательна. А теперь нарисуйте график функции, которая имела бы локальный минимум или максимум. Это могут быть к примеру графики функций $x^2, e^{-\frac{x^2}{2}}, \sin(x)$, $\cosh(x)$.Их графики (смещённые) можно видеть на рисунке:



Как мы видим, на определённых интервалах все эти функции возрастают, и на определённых интервалах все они убывают. То бишь мы можем смело говорить, что на определённых интервалах производная этих функций

положительна, и на определённых интервалах она отрицательна. То бишь производная меняет свой знак, значит можно говорить, что где- то есть такая точка, что производная в этой точке равна нулю (подробнее см. Принцип Больцано- Коши). Как легко увидеть на рисунке, да и вообще догадаться, этой точкой является как раз таки точка локального экстремума (если она существует). Сразу стоит отметить, что есть функции которые не имеют локального экстремума. К примеру монотонные функции, уходящие на бесконечность. Примерами могут служить функции $\ln(x)$, 2^x, $gd(x)$
Их графики (смещённые) изображены на рисунке:



Строгое доказательство

Строгое математическое доказательство фактически повторяет интуитивное, просто всё немного более компактно и строго. Оно небольшое и очень понятное, потому его можно здесь привести

1. Мы имеем дело с локальным максимумом. Тогда
$$\lim_{x\to a^-} f'(x) \geq 0\,;\ \lim_{x\to a^+} f'(x) \leq 0$$
2. Мы имеем дело с локальным минимумом. Тогда
$$\lim_{x\to a^-} f'(x) \leq 0\,;\ \lim_{x\to a^+} f'(x) \geq 0$$

   На этом этапе можно повеселиться, и построить бесконечно много окрестностей точки a. Одну меньше другой, и в каждой из них производная меняет знак. Но по лемме о вложенных шарах (отрезок можно рассматривать как закрытый одномерный шар) существует только одна точка, принадлежащая им всем. Поскольку мы строили окрестности точки a, то это она и будет. Тогда по принципу Больцано-Коши производна обращается в нуль именно в ней.

q.e.d

Если у кого- то всё же остались сомнения в верности теоремы, можно рассмотреть очень простенький пример. Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$. Всем известно что абсцисса локального экстремума такой функции находится по формуле $x = -\frac{b}{2a}$. С другой стороны мы можем взять производную, и применить лемму Ферма. Тогда, с учётом описанных в первой части свойств производной получим.

$$f'(x) = (ax^2 + bx + c)' = 2ax + b$$

$$f'(x) = 0 \leftrightarrow x = -\frac{b}{2a}$$

В дальнейшем, ввиду усложнения задач простейшие выкладки не будут расписываться. Теперь же, решим несколько задач в которых нам элегантно поможет производная.

Задача 1. Сравните числа e^{π} и π^{e}

Для начала определим знак неравенства как $\upharpoonleft$. Наша задача будет определить стрелочку более подробно. Очевидно что оба числа положительны, но с другой стороны, это означает что их можно прологарифмировать. Тогда мы получим:

$$(e^{\pi} \upharpoonleft \pi^{e}) \leftrightarrow (\ln(e^{\pi}) \upharpoonleft \ln(\pi^{e}))$$

Натуральный логарифм- монотонно возрастающая функция на всей области определения, потому знак неравенства ни в коем случае не поменяется.

Тогда, по известным тождествам получим:

$$(\ln(e^{\pi}) \upharpoonleft \ln(\pi^{e}))$$

$$\pi \upharpoonleft e \cdot \ln(\pi)$$

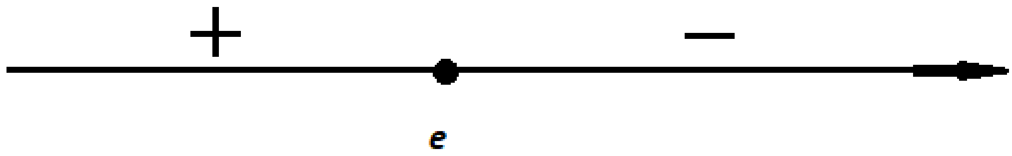
$$0 \upharpoonleft e \cdot \ln(\pi) - \pi$$

Далее сделаем очень неожиданный, но изящный шаг (к слову довольно часто применяющийся в доказательстве серьёзных утверждений). Рассмотрим функцию $e * \ln(x) - x$. И попытаемся определить в каких точках она больше 0, а в каких меньше. Используем для этого производную

$$(e \cdot \ln(x) - x)' = \frac{e}{x} - 1$$

Поверьте на слово, производная функции вида $\log_a x$ это $\frac{1}{x \ln a}$.

$$(\frac{e}{x} - 1 = 0) \leftrightarrow (\frac{e}{x} = 1) \leftrightarrow (x = e)$$



Максимальное значение функция принимает в точке $x = e$, и равно оно оказывается нулю! Но тогда, раз максимальное значение функции это 0, и достигается оно только в одной точке, то во всех остальных точках эта функция меньше нуля, откуда получаем.

$$0 > e \cdot \ln(\pi) - \pi$$

А значит

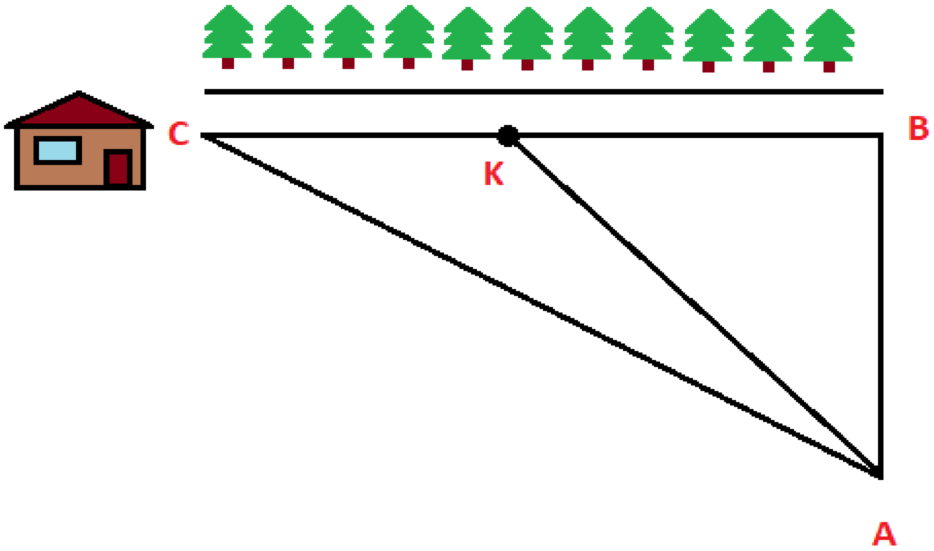
$$e^{\pi} > \pi^{e}$$

Радуемся тому, что достигли цели, и плавно переходим к следующей задаче, являющейся примером того, как в большинстве случаях используется производная. Но для начала маленький комментарий к доказательству:

Комментарий:

Очевидно, что приведённые рассуждения работают отнюдь не для всех пар чисел a и b (Попробуйте убедиться в этом сами). Но если вам надо сравнить числа e^{x} и x^{e}, вы можете смело говорить, что для всех вещественных x $e^{x} > x^{e}$

Задача 2. Не самый приятный сценарий. Почему- то вы оказались в заснеженном поле (температура -20С). Вы не хотите мёрзнуть и вдруг видите вдалеке дом. Расстояние до дома 50м, но вы видите дорогу, до которой на глаз 30м. По дороге можно бежать со скоростью 2м/с. По полю только со скоростью в 1м/с. За какое минимальное время вы можете достичь укрытия?



Думаю не надо разъяснять почему наш путь не будет кривой (см. Неравенство ломаной). Для начала найдём длину стороны CB ΔABC.
По теореме Пифагора:

$$CB = \sqrt{50^2 - 30^2} = 40$$

Теперь, пусть на отрезке CB есть такая точка K, что ломаная AKC, является кратчайшим (по времени) путём. И обозначим длину отрезка KB за x. Тогда по теореме Пифагора и аксиоме измерения отрезков имеем:

$$CK = 40 - x$$

$$AK = \sqrt{x^2 + 900}$$

Тогда для времени, за которое мы можем пробежать этот путь имеем:

$$t(x) = \sqrt{x^2 + 900} + \frac{40 - x}{2} = \sqrt{x^2 + 900} - \frac{1}{2}x + 20$$

Нам необходимо найти при каком x время минимально. Возьмём производную! Получим:

$$t'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 900}} - 0.5$$

$$t'(x) = 0$$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + 900}} = 0.5$$

$$x = 0.5\sqrt{x^2 + 900}$$

$$x^2 = 0.25(x^2 + 900)$$

$$4x^2 = x^2 + 900$$

$$x^2 = 300 \leftrightarrow x = 10\sqrt{3} \text{ (с учётом ограничений)}$$

Проверка подтверждает что $x = 10\sqrt{3}$ точка минимума $t(x)$

А $t(10\sqrt{3}) = 20 + 15\sqrt{3} \approx 46(\text{с})$

В следующей задаче мне очень бы хотелось рассказать доказательство действительно замечательного тождества, но оно требует чуть больше терпения чем задачи до него, но поверьте мне, удовольствие от понимания изящности решения стоит того!

Вспомогательное утверждение к задаче 3.

Рассмотрим некоторую функцию $f(x)$, также рассмотрим многочлен вида

$$P(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

Зададимся целью подобрать коэффициенты a_i, таким образом чтобы выполнялось равенство

$$\forall x \in R\ f(x) = P(x)$$

То бишь наша задача- разложить функцию в степенной ряд. Логично сказать, что если одна функция равна другой на некотором интервале, то на этом интервале у них совпадают все параметры. В том числе и производные всех порядков. В таком случае мы имеем

$$\forall x \in R\ f^{(n)}(x) = P^{(n)}(x)$$

Только вот легче задача кажется не стала, но давайте возьмём к примеру $x = 0$, тогда мы имеем

$$f^{(n)}(0) = P^{(n)}(0)$$

Но что по сути представляет $P^{(n)}(0)$? Как мы уже выяснили $\left(a_i x^i\right)' = i a_i x^{i-1}$ Т.к в нуле все коэффициенты с иксом обнуляются, то мы имеем следующее:

$$P^{(n)}(0) = a_n n!$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

И в итоге, мы получим что:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i + R_n(x)$$

Полученное разложение называется рядом Маклорена. Заметим, что если вместо многочлена $P(x)$ взять $P(x - \text{a})$, то функцию можно будет начать раскладывать с любой удобной точки, а полученное разложение будет представлять собой ряд Тейлора:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x-a)^i + R_{n+1}(x)$$

Но что за член $R_n(x)$ в конце? Дело в том, что отнюдь не для всех функций такой ряд будет аппроксимирующим. Остаточный член является разностью между исходной функцией и рядом.

В форме Лагранжа остаточный член выглядит как.

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(a+\theta)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \qquad \theta \in (0;1)$$

Его вывод мы опустим, т.к в таком случае нам придётся доказать ещё ряд вспомогательных теорем. Теперь, чтобы отточить свои навыки, потренируемся раскладывать функции в ряд Маклорена. К примеру $e^x, \cos(x),$ и $\sin(x)$.

Подзадача 3.1 Разложить в ряд Маклорена e^x.

Как известно $(e^x)' = e^x$. Тогда, $e^{x(n)}$(0)=1. Значит $a_n = \frac{1}{n!}$

Теперь оценим остаточный член ряда:

$$R_{n+1}(x) = \frac{e^{\theta}}{(n+1)!}x^{n+1}$$

Очевидно, что при $n \to \infty$ $R_{n+1}(x) \to 0$ т.к знаменатель растёт ораздо быстрее числителя. Значит мы можем смело пренебречь остатком, и в итоге получим:

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}x^i = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \cdots$$

Подзадача 3.2 Разложить в ряд Маклорена $\sin(x)$.

Выпишем первые производные $\sin(x)$ до повторения

$$(\sin(x))' = \cos(x)$$
$$(\cos(x))' = -\sin(x)$$
$$(-\sin(x))' = -\cos(x)$$
$$(-\cos(x))' = \sin(x)$$

Т.к $\sin(0) = 0$, то сумма нескольких первых членов разложения будет выглядеть как:

$$x - \frac{1}{6}x^3$$

Оценим остаточный член ряда:

$$R_{n+1}(x) = \frac{sin^{(n)}(\theta)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

Т.к и синус, и косинус изменяются лишь в пределах от 1 до -1, то очевидно что при знаменателе, устремляющимся в бесконечность, со скоростью гораздо большей скорости степенной функции в числителе, мы имеем полное право приравнять остаток к нулю в пределе. В результате мы получим:

$$\sin(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}$$

Повторяя всё точно так же для косинуса получаем:

$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \frac{x^{2i}}{(2i)!}$$

Для дальнейшего шага необходимо коротко рассказать о такой константе как i (не путать с индексом суммирования!). Определяется она как число, такое что $i^2 = -1$. Это может показаться абсурдом, но предположение, что такое число есть оказалось очень плодотворным! i, или как её ещё называют, мнимая единица сегодня используется в самых передовых физических теориях, уже в конце 19 века она широко применялась в аэродинамике, а распределение простых чисел- задача которая кажется так бы и стояла на месте если б не расширение поля действительных чисел, путём добавления мнимой единицы.

Теперь рассмотрим функцию $f(x) = e^{ix}$, раскладывая её в ряд Маклорена имеем:

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{1}{2}x^2 - i\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + i\frac{1}{120}x^5 + \cdots =$$
$$= \left(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots\right) + i\left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots\right) =$$
$$= \cos(x) + i\sin(x)$$

Полученная формула называется тождеством Эйлера, но это ещё не самое красивое утверждение. Подставим $x = \pi$, тогда мы получим:

$$e^{i\pi} = \cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1$$

Присмотритесь, в этом тождестве переплетаются пожалуй важнейшие математические постоянные. π из геометрии, e из матанализа, и i, отвечающее за алгебру. Этот простой пример показывает мощь такого инструмента как ряды, а ведь начиналось всё с обыкновенной производной. Ряд бывают самыми разными, и ряд Тейлора далеко не последний, с помощью него решается немаленькое множество физических задач, а в своё время Леонард Эйлер даже решил Базельскую проблему с помощью него (Сумма ряда обратных квадратов)

Однако возвращаясь к теме производной возникает вполне себе закономерный вопрос. Как быть если мы имеем дел с функцией нескольких переменных? В этом случае на помощь приходит такой объект как частная производная.

Частная производная. Её основные свойства. Оператор Набла. Физическое применение

Говоря о частной производной функции n переменных, будем рассматривать только функцию трёх переменных $f(x; y; z)$. Т.к все свойства будут в точности аналогичными. Кажется это тот самый случай, когда для интуитивного понимания необходимо взглянуть на формулу:

$$\partial_x f = \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{a \to 0} \frac{f(x + a; y; z) - f(x; y; z)}{a}$$

Как мы видим, частная производная характеризует скорость именно по данному аргументу функции. Очевидно что частная производная индуцирует свойства Приведём их снова:

$$\partial_x(f+g) = \partial_x f + \partial_x g$$
$$\partial_x(fg) = g\partial_x f + f\partial_x g$$
$$\partial_x(f^\circ g) = (\partial_x f^\circ g)\partial_x g$$

Приведём краткий пример взятия частной производной просто для понимания самой специфики объекта:

Задача 1.

Найти частные производные функции $3x^5 + y^6 + 3xy$

При взятии частной производной. Все остальные аргументы, кроме нужного нам рассматриваются как константы. Потому:

$$\partial_x(3x^5 + y^6 + 3xy) = 15x^4 + 3y$$
$$\partial_y(3x^5 + y^6 + 3xy) = 6y^5 + 3x$$

С другой стороны. Попробуем взять вторые частные производные. А именно: $\partial_x\partial_y$ и $\partial_y\partial_x$. Получим следующее:

$$\partial_x\partial_y\,(3x^5 + y^6 + 3xy) = \partial_x(6y^5 + 3x) = 3$$
$$\partial_y\partial_x\,(3x^5 + y^6 + 3xy) = \partial_y(15x^4 + 3y) = 3$$

Это очень простой пример. Но он показывает ещё одно очень важное свойство оператора частной производной.

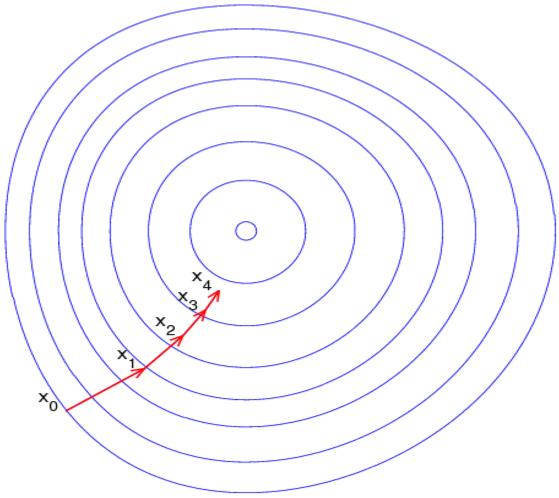
$$\partial_x\partial_y = \partial_y\partial_x$$

Однако сами по себе частные производные могут не представлять такого интереса, как их линейная комбинация по координатам. Для трёхмерной функции выглядит это следующим образом:

$$\nabla f = \left(i\partial_x + j\partial_y + k\partial_z\right)f$$

Где i, j, k единичные базисные векторы по соответствующим координатам. Этот оператор называется оператором Набла. Однако сам по себе смысла он не имеет, смысл он приобретает как видно из равенства только при умножении на некоторую функцию. Так, функционал получаемый скалярным умножением наблы на некоторую функцию называется градиентом. ($grad\ f$)

Интересное, и самое основное свойство градиента состоит в том, что он указывает направление наискорейшего движения функции в данной точке. На практике это обозначает примерно следующее. Мы можем численно найти точку минимума или максимума функции, примерно зная область где она (точка минимума) находится. Т.к градиент фактически прямо указывает направление движения к ней. В век компьютерных технологий и больших вычислительных мощностей. Это гораздо быстрее и экономически выгоднее, чем решать как правило внушительные уравнения. Чтобы суть метода была более ясна, приведём графическую иллюстрацию того, как ищется точка локального экстремума.



$$x_{i+1} = x_i + a\nabla f(x_i)$$

Градиентные методы являются достаточно удобным и мощным инструментом решения различных задач. К примеру решение системы уравнений:

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

По существу является задачей поиска минимума функции

$$F(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} |f_i(x_1, \dots, x_n)|^2$$

А как мы уже сказали, делать это напрямую не самая приятная затея, по крайней мере в большинстве случаев.

Однако внимательный заметит, что Набла- это вектор. Потому умножать на него можно и вектора, по векторным правилам. Точнее вектор функции.

$$f(\overrightarrow{x}) = (f_1(\overrightarrow{x_1});\ \dots\ f_n(\overrightarrow{x_n}))$$

Соответствующие операторы (векторного или скалярного произведения на наблу) обозначаются как:

$$\nabla \vec{f} = \partial_{x1} f + \dots + \partial_{xn} f = div\,(f)$$

$$\nabla \times \vec{f} = rot\,(f)$$

Но давайте распишем ротор ($rot(f)$) в координатной форме. Как известно, векторное и скалярное произведения берутся как составляющие части чистого произведения векторов, проиллюстрируем на примере.

$$(x_1 i + y_1 j + z_1 k)(x_2 i + y_2 j + z_2 k) = -(x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2) +$$
$$(y_1 z_2 - z_1 y_2)i + (z_1 x_2 - x_1 z_2)j + (x_1 y_2 - y_1 x_2)k$$

Для преобразований мы использовали знаменитое тождество Гамильтона для алгебры кватернионов

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

Говоря о философском смысле операторов ротора и дивергенции, то дивергенция является оператором, отображающим поток данного поля, в конкретной его точке. Под векторным полем в дальнейшем будем подразумевать обычную вектор функцию. Наиболее понятным на мой взгляд смысл дивергенции раскрывается в уравнении непрерывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(j) = \sigma$$

Где ρ- плотность распределения некоторой величины. j- плотность потока некоторой величины. Соответственно σ- добавление величины на единицу объёма на единицу времени. Таким образом к примеру, теорему Гаусса для потока напряжённости электрического поля можно переписать в дифференциальной форме.

$$div(E) = 4\pi\rho$$

Философский смысл ротора состоит в характеристике вращения бесконечно малого и лёгкого тела, если бы оно находилось в этом поле. Самый простой интуитивный образ- вектор угловой скорости очень лёгкой пылинки, помещённой в поток некоторого газа, скорость которого и берётся как векторное поле.

Также самым простым примером использования частных производных на практике являются уравнения электродинамики Максвелла.

$$\begin{cases} rot(\vec{E}) = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ div(\vec{B}) = 0 \\ div(\vec{E}) = \rho \\ rot(\vec{B}) = \frac{1}{c}\vec{j} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} \nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{E} = \rho \\ \nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c}\vec{j} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

Нас привлекает второе уравнение. Дело в том, что как нетрудно убедиться, дивергенция ротора равна нулю. Потому вектор магнитного поля может быть записан как

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

Вектор $\vec{A}$ принято называть векторным потенциалом поля. Теперь же подставим это уравнение в самое первое, и воспользуемся тем, что частные производные коммутируют, получим.

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c}\nabla \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\nabla \times (\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = 0$$

Ротор градиента также равен нулю. Потому выражение в скобках можно записать как

$$\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla \Phi$$

Где Ф- скалярный потенциал электромагнитного поля. Выносить минус за символ Набла не более чем просто удобное соглашение. Потому, с учётом введённых обозначений можно в явном виде получить уравнения для электрического и магнитного полей:

$$\begin{cases} \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \Phi \\ \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \end{cases}$$

Хоть может и показаться что потенциалы также, просто удобное соглашение. На деле это совсем не так. Определяя потенциал, как решение уравнения

$$\vec{F} = -\nabla V$$

Где $\vec{F}$- сила, действующая на объект, мы выясняем, что к примеру в квантовой механике понятие силы уходит на задний план, в отличии от потенциала. К примеру свободное скалярное поле характеризуется следующим образом.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)^2 - \frac{1}{2}m^2\varphi^2$$

Где φ- скалярный потенциал, а $\mathcal{L}$- лагранжиан, это функционал, напрямую связанный с энергией поля.

Более углублённо изучением потенциалов и их свойств занимается теория потенциала.

Интеграл. Основные понятия. Вариационная производная. Уравнение Эйлера Лагранжа.

Вводя операцию взятия производной вполне закономерно задаться вопросом « А можно ли восстановить функцию по её производной?» И ответ, да! Можно, именно с этой целью изначально и вводится понятие взятия интеграла, как операции, обратной взятию производной. Соответственно, можно сразу привести примеры самых простых интегралов:

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln x + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

Заметим, что любой интеграл определён с точностью до константы, т.к производная константы равна нулю. Разумеется можно брать интегралы и гораздо более сложных функций, но это требует некоторой подготовки. Однако приведём основные методы.

1.Подстановка

В общем виде этот метод можно записать следующим образом

$$\int f(x)dx = \left\| \begin{matrix} x = \varphi(t) \\ dx = d\varphi = \varphi'(t)dt \end{matrix} \right\| = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Приведём несколько примеров для ясности

$$\int \frac{1}{x\ln(x)}dx = \left\| \begin{matrix} \ln(x) = t \\ \dfrac{dx}{x} = dt \end{matrix} \right\| = \int \frac{1}{t}dt = \ln(t) + C = \ln(|\ln(x)|) + C$$

$$\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4}dx = \left\| \begin{matrix} x = sh(t) \\ dx = ch(t)dt \end{matrix} \right\| = \int \frac{\sqrt{1+sh^2(t)}}{sh^4(t)}ch(t)dt = \int \frac{ch^2(t)}{sh^4(t)}dt =$$

$$\int \frac{-ch^2(t)}{sh^2(t)}\frac{1}{-sh^2(t)}dt = -\int cth^2(t)d\big(cth(x)\big) = -\frac{1}{3}cth^3(t) + C$$

Где

$$sh(x) = -i\sin(ix) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$ch(x) = \cos(ix) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$cth(x) = \frac{ch(x)}{sh(x)}$$

Зная разложения синуса и косинуса через Экспоненту по формуле Эйлера. Можно очень грубо сказать, что шинус- это тот же синус, но в разложении через экспоненту нет i, также определяется и кошинус.

На последнем шаге мы использовали очевидное тождество

$$\int g(x)f'(x)dx = \int g(x)df(x)$$

Теперь же, имея хоть какое- то представление об интеграле, рассмотрим функцию.

$$\int_a^b f(x)dx = \int f(x)dx\ (b) - \int f(x)dx\ (a)$$

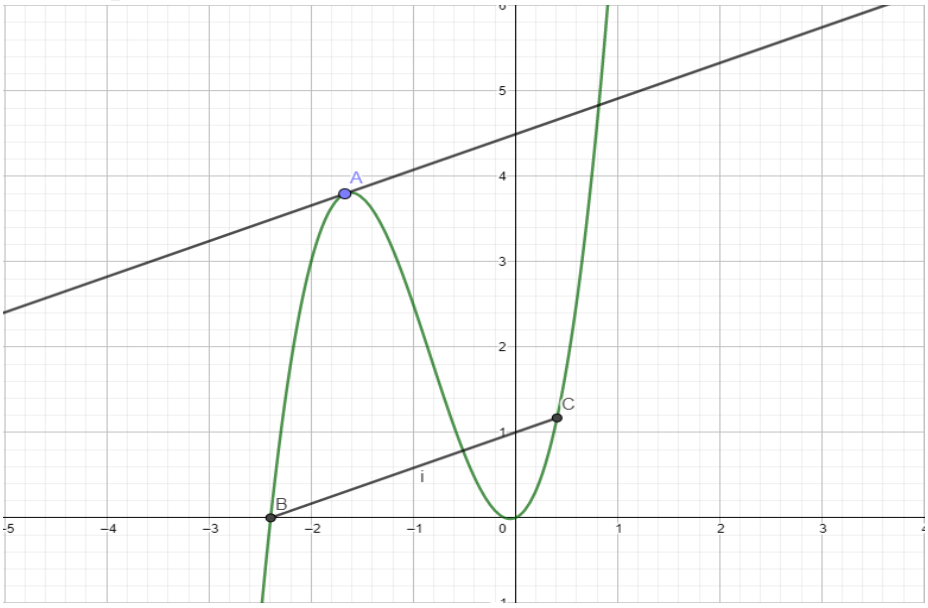
Такая функция очень ценна, и сейчас мы покажем почему, но для начала приведём теорему Лагранжа

Теорема Лагранжа

Пусть непрерывная и дифференцируемая функция задана на отрезке $[a;b]$, тогда на отрезке найдется такая точка c, что выполняется равенство:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

Не будем вдаваться в доказательство, но для наглядности объясним его геометрический смысл.



Как известно, для прямой заданной в виде

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

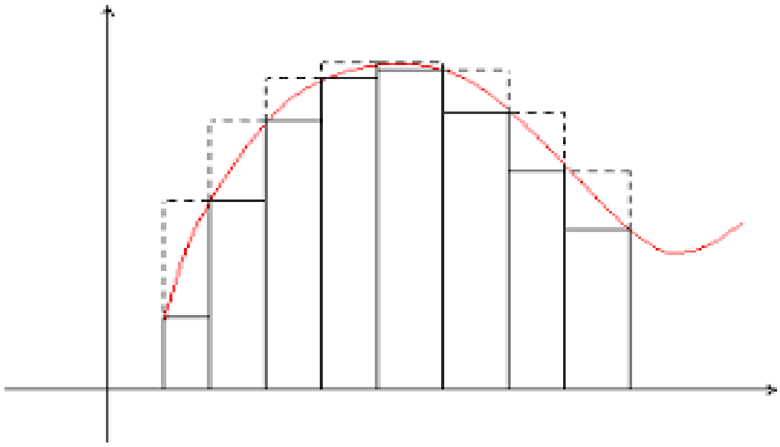
Выражение $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ является её угловым коэффициентом, а значение производной в некоторой точке, равняется угловому коэффициенту касательной к графику функции в этой точке. Т.е геометрический смысл теоремы Лагранжа примерно следующий

Если функция $f(x)$ дифференцируема и непрерывна на отрезке $[a;b]$, то на этом отрезке существует такая точка, что касательная к графику функции к ней параллельна отрезку, соединяющему точки $(a;f(a))$ и $(b;f(b))$.

Далее, рассмотрим сумму следующего вида

$$\sum_i f(\varepsilon_i)(x_{i+1}-x_i) \qquad \bigcup_i [x_i;x_{i+1}]=[a;b] \;\; \varepsilon_i \in [x_i;x_{i+1}]$$

Очевидно, что при уменьшении величины $(x_{i+1}-x_i)$ сумма по факту стремится к величине площади, заключенной под графиком функции, аппроксимируя её площадями прямоугольников следующим образом



Пусть функция является интегрируемой на $[a; b]$, тогда, по теореме Лагранжа на каждом из отрезков $[x_i; x_{i+1}]$ существует такая точка ε_i, что

$$\frac{F(x_{i+1}) - F(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = f(\varepsilon_i) \leftrightarrow F(x_{i+1}) - F(x_i) = f(\varepsilon_i)(x_{i+1} - x_i)$$

Где

$$F(x) = \int f(x)dx$$

Тогда, устремляя значение $(x_{i+1} - x_i)$ к нулю, можно записать, что

$$S = \sum_i f(\varepsilon_i)(x_{i+1} - x_i) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$$

Таким образом, мы доказали теорему Ньютона- Лейбница, о том что определённый интеграл (интеграл с верхним и нижним пределами) равен площади под графиком функции, это свойство является геометрическим смыслом определённого интеграла.

Решим несколько типовых задач на применение определённого интеграла

Задача 1. Вычислить площадь под графиком функции $x\sin(3x) + \cos(2x)$ на промежутке $[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}]$

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} x\sin(3x) + \cos(2x)\,dx = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} x\sin(3x)dx + \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos(2x)\,dx =$$

$$= -\frac{1}{3}x\cos(3x)\,|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} + \frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos(3x)\,dx + \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos(2x)\,dx =$$

$$\frac{1}{3}\left(-x\cos(3x) + \frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{1}{2}\sin(2x)\right)|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{2\pi}{9} + \frac{\sqrt{3}}{12}$$

На первом шаге была использована формула

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

В самом деле, продифференцировав обе части мы получим верное равенство.

Также $f(x)|_b^a = f(a) - f(b)$

Пытливый человек должно быть, вспомнив Лемму Ферма задастся вполне закономерным вопросом. Возможно ли найти такую функцию $f(x)$, что определённый интеграл на некотором промежутке принимает на ней свой минимально возможное значение? И ответ: Да! Существует теорема, позволяющая решить эту задачу!

Теорема

Пусть функция $F\big(x; f(x); f'(x)\big)$ имеет непрерывные первые частные производные по всем аргументам, а функция f имеет непрерывную первую производную. Тогда функционал

$$\int_a^b F\big(x; f(x); f'(x)\big)dx$$

Достигает экстремум на этой функции, только в том случае, если выполняется следующее уравнение

$$\frac{\delta F}{\delta f} = \frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial f'} = 0$$

Это уравнение называется уравнением Эйлера -Лагранжа, и является основным уравнением вариационного исчисления. А символ $\frac{\delta F}{\delta f}$ называется вариационной производной, как можно понять, она имеет тот же смысл что и обыкновенная производная, но только в функциональных пространствах.

Приведём пример одной из классических задач вариационного исчисления.

Задача 1. Цилиндрическую болванку обточили на токарном станке так, чтобы радиусы оснований остались неизменны, но площадь боковой поверхности оказалась минимальной. Далее полученную фигуру разрезали по оси симметрии , проходящей через центры оснований. Одну из полученных половин положили на плоскость так, чтобы отрезок, соединявший бывшие середины оснований совпал с осью абсцисс. Установите график какой функции очерчивает верхняя часть такой фигуры.

Для более лёгкого решения переформулируем задачу:

Найдите такую функцию $y(x)$, чтобы поверхность, полученная вращением её графика вокруг оси абсцисс имела минимальную площадь.

Для начала найдём функционал, отвечающий за площадь требуемой поверхности. Если вы достаточно прониклись идеей апроксимизации сложных объектов мелкими деталями, то вероятно вы понимаете, что площадь может быть получена как сумма площадей бесконечно малых цилиндров, с вырезанными основаниями. В таком случае. Радиус основания такого цилиндра очевидно равен $y(t)$, а высотой является длина вектора производной. По теореме Пифагора она выражается как

$$h = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$$

Выбирая в качестве параметра t x мы получим что

$$S = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}dx$$

Понимая интеграл, как ту же сумму, но только по непрерывному множеству. Теперь, наконец- то запишем уравнение Эйлера- Лагранжа:

$$\frac{\partial(y\sqrt{1+(y')^2})}{\partial y} = \frac{d}{dx}\frac{\partial(y\sqrt{1+(y')^2})}{\partial y'}$$

$$\sqrt{1+(y')^2} - \frac{d}{dx}\frac{yy'}{\sqrt{1+(y')^2}} = 0$$

Полученное уравнение по понятным причинам называется дифференциальным. Оно примечательно тем, что несмотря на кажущийся внушительный вид имеет довольно изящное и лаконичное решение. К примеру левую и правую его части можно проинтегрировать, тогда мы получим равенство:

$$y\sqrt{1+(y')^2} - y'\frac{yy'}{\sqrt{1+(y')^2}} = C$$

Вычисление этого интеграла не приводится, т.к оно всё таки требует некоторой большей подготовки в области вариационного исчисления. Тогда после упрощения получим:

$$\frac{y}{\sqrt{1+(y')^2}} = C$$

$$y^2 - C^2(y')^2 = C$$

Попробуем найти решение в виде :

$$y = A\, ch(\frac{x}{A})$$

В самом деле:

$$A^2ch^2\left(\frac{x}{A}\right) - \frac{C^2A^2}{A^2}sh^2\left(\frac{x}{A}\right) = C$$

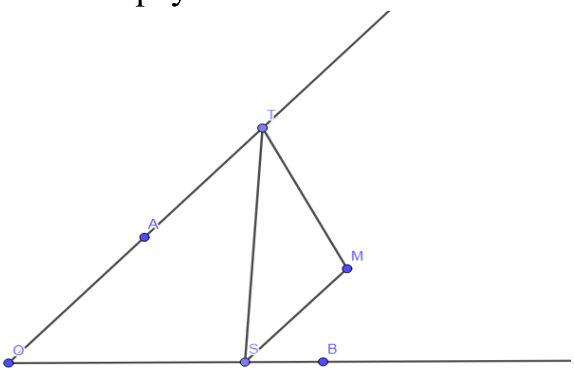
Это равенство верно при $A = C$

Значит ответ на исходный вопрос. График гиперболического косинуса. Подобную задачу впервые рассмотрел Архимед, однако он считал что ответом является график параболы. У этой задачи есть одно интересное следствие, если рассмотреть подвешенную нитку, то она также будет образовывать график гиперболического косинуса. Это связано с тем, что требование минимальности действия (нитка примет положение, при котором её потенциальная энергия в гравитационном поле земли минимальна) для функции Лагранжа (функция, описывающая развитие и изменение некоторой физической системы, определяется как разность кинетической и потенциальной энергий) эквивалентно требованию выполнения для неё уравнения Эйлера- Лагранжа.

Также заметим, что поскольку потенциальная энергия такой нитки минимальна, то в ней действуют только силы растяжения. В таком случае возьмём толстую медную проволоку и согнём её в форме графика гиперболического косинуса. Поставив её как арку мы получим удивительную картину, полученная конструкция имеет максимально возможную потенциальную энергию в гравитационном поле земли, а все силы растяжения в ней перешли в силы сжатия. Это означает, что если мы к примеру построим арку такой формы, то она будет являться самой надёжной конструкцией. К примеру таким образом построены “Врата на запад” в Сент-Луисе.

ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Задача 1. Дан угол AOB, внутри него расположена некоторая фиксированная точка M. Точки T и S произвольны и принадлежат прямым AO и BO соответсвенно. Построить точки T и S таким образом, чтобы периметр полученного треугольника был минимальным.



Решение

По теореме косинусов имеем:

$$TS^2 = TM^2 + MS^2 - 2TM \cdot MS \cdot \cos(\alpha)$$

Где за α обозначен угол TMS. Очевидно, что поскольку стороны неотрицательны, то минимуму их сумы соответствует минимум суммы их квадратов, тогда получим, что минимуму периметра соответствует минимум следующей функции

$$2TM^2 + 2MS^2 - 2TM \cdot MS \cdot \cos(\alpha)$$

$$TM^2 + MS^2 - TM \cdot MS \cdot \cos(\alpha)$$

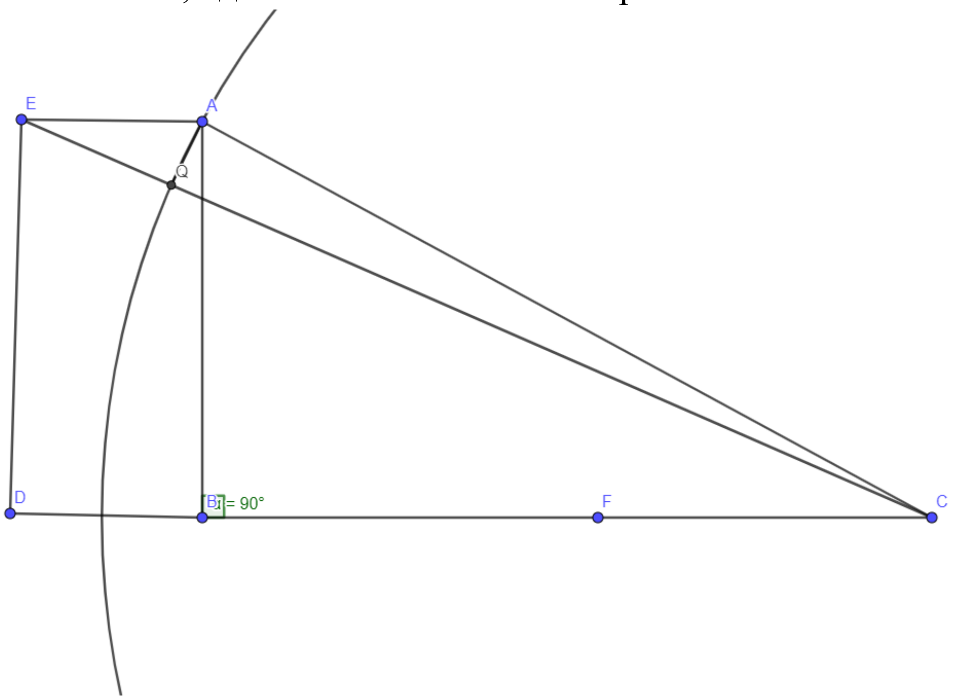
Пусть отрезок TM фиксирован, тогда мы исследуем на минимум функцию

$$MS^2 - MS \cdot \cos(\alpha)$$

Очевидно что первое слагаемое как функция, при условии что минимально возможное значение MS достаточно велико (можно обеспечить гомотетией) растёт гораздо быстрее чем второе, потому минимуму функции соответствует минимум отрезка MS, который достигается только в том случае, когда MS перпендикулярен OB . Повторяя ту же процедуру для отрезка TM получаем, что искомым треугольником является треугольник, стороны MS и TM , которого перпендикулярны сторонам угла.

Задача 2. Докажите теорему Пифагора

Теорема Пифагора также известна как теорема, имеющая самое большое число доказательств, одно из них основано на применении матанализа.

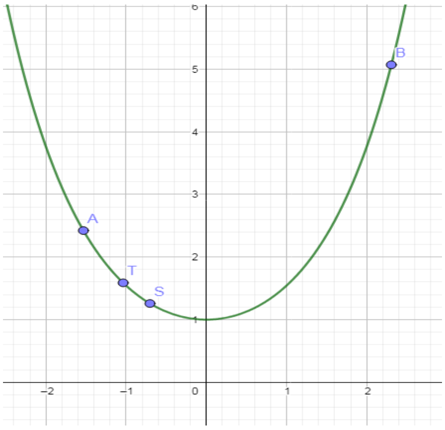


Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC, рассмотрим приращение катета AB $da = AE$, как видно из рисунка, оно влечёт за собой приращение гипотенузы $dc = EQ$. Заметим, что при $da \to 0$ точка Q стремится к точке A, а потому прямая AQ стремится к положению касательной к окружности. Потому можно сказать что угол EQA прямой, из чего сразу следует подобие треугольников EAQ и ABC, и потому получаем следующее равенство:

$$\frac{da}{dc} = \frac{c}{a}$$
$$a\,da = c\,dc$$
$$a^2 = c^2 + const$$
Т.к при стремлении катета a к нулю гипотенуза c стремится к катету b, то:
$$a^2 \to b^2 \leftrightarrow const = b^2$$
Что и требовалось доказать.

Задача 3. Тяжёлая нить, закреплённая концами в двух точках, провисает под действием собственного веса. Найти уравнение графика, который образует нить.

Мы пришли к ответу на эту задачу исходя из сугубо физических соображений, но никогда не плохо найти строго математическое доказательство.



Рассмотрим бесконечно малый элемент TS, как известно, в силу принципа наименьшего действия, сила действующая на точку T направлена вдоль касательной к графику функции в этой точки. Пусть проекции в точке T по осям соответственно равны X и Y. Тогда очевидно что в точке S проекции равны $X + dX$ и $Y + dY$. Но с другой стороны, на отрезок TS действует вертикальная сила $P\,dl$ где P – вес элемента дуги, а dl – единица длины дуги. С другой стороны, система находится в равновесии, потому по первому закону Ньютона имеем систему уравнений:
$$\begin{cases} X + dX - X = 0 \\ Y + dY - Y - P\,dl = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} X = const \\ dY = P\,dl \end{cases}$$
Поскольку сила, приложенная к бесконечно малому элементу направлена вдоль касательной в этой точке. То угловой коэффициент касательной равен отношению проекции сил на оси. Т.е:
$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y}{X}$$
Продифференцировав это равенство по x имеем:
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{X}\frac{dY}{dx} = \frac{P}{X}\frac{dl}{dx}$$
Как мы показали ранее:

$$\frac{dl}{dx} = \sqrt{1 + (y')^2}$$

Тогда получим:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{P}{X}\sqrt{1 + (y')^2} \leftrightarrow ay'' = \sqrt{1 + (y')^2} \leftrightarrow (ay'')^2 = 1 + (y')^2$$

Произведём замену, пусть $y' = sh\, z$, тогда получим:

$$(kz'ch(z))^2 = 1 + sh^2(z) \leftrightarrow kz' = 1 \leftrightarrow z = \frac{x + C}{k}$$

$$y = k\, ch\left(\frac{x + C}{k}\right)$$

Что и требовалось доказать.

На мой взгляд одним из лучших примеров естественного возникновения производной, а следовательно и матанализа являются биологические модели. Рассмотрим следующую задачу чтобы продемонстрировать саму мысль:

Задача 4. В свете последних событий попытаемся описать динамику распространения некоторой болезни с помощью матанализа.

Пусть x – количество уже заражённых людей.

N- количество всех людей.

Тогда из обыкновенных комбинаторных соображений имеем следующее выражение.

$$\frac{dx}{dt} = kx(N - x)$$

Где k- коэффициент пропорциональности, тогда:

$$\frac{dx}{x(N - x)} = k\, dt$$

$$\int \frac{dx}{x(N - x)} = \int k\, dt \leftrightarrow \int \frac{dx}{x(N - x)} = kt + C_1$$

$$\int \frac{dx}{x(N - x)} = \frac{1}{N}\int (\frac{1}{x} - \frac{1}{x - N})dx = \frac{\ln(\left|\frac{x}{x - N}\right|)}{N}$$

$$\frac{x}{x - N} = e^{Nkt + C_1} \leftrightarrow x = \frac{NCe^{Nkt}}{Ce^{Nkt} - 1}$$

Подбирая необходимые коэффициенты мы и получаем характеристику динамики распространения болезней, в том числе и коронавируса.

Использованная литература

1.А. Р. Янпольский "Гиперболические функции"

2.Бартон Цвибах "Начальный курс теории струн"

3.Л.Э. Эльсгольц "Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление"